数理解析研究所講究録
366巻 1979年 1-13

On the Pick-Nevanlinna problem

東工大 理 吹田信之

1. 問題の設定. Ωを定数でない有界正則函数を有するリーマン面とする. Ω上に有限個の点z_ν, $\nu=1, 2, \cdots, N$と, 各点z_νにデータA_ν, $(|A_\nu|<1)$を与え, $f(z_\nu)=A_\nu$をみたす有界函数で$|f(z)|<1$, $z\in\Omega$となるものを求めるのが古典的なPick-Nevanlinnaの問題であった. Nevanlinna [11] は interpolation points $\{z_\nu\}_{\nu=1}^N$とは異なる点z_0を取り, 上の条件をみたす函数族$\mathcal{F}$に対する値の集合: $W=\{f(z_0) \mid f\in\mathcal{F}\}$をWertvorratと名付け, とくに$\Omega$が単位円板の場合は, Wは必ずある閉円板となることを示した. 一般のリーマン面ΩについてはWの形状は不明であるが, つぎのことがGarabedian [6] により分っている: Wは円弧状凸な有界閉集合である. すなわち, w_1, $w_2\in W$ならば, w_1, w_2および単位円外の一点w_3を通る円周上の円弧$\widehat{w_1, w_2}$はWに含まれる. このことから

容易に，W が二点を含めば内点を含むことがわかる．W の形状はその境界点が決定されれば明らかになるので，このことはつぎの極値問題に帰着させることができる：$\mathcal{B}=\{f \mid f(z_\nu)=A_\nu,\ \nu=1,\cdots N,\ \|f\|\leqq 1\}$，$\|f\|=\sup|f(z)|$，$z_0\in\Omega$ とし，$\max \mathrm{Re}(e^{i\theta}f(z_0))$，$f\in\mathcal{B}$ を決定せよ．この問題を Pick-Nevanlinna の問題と呼ばれる．実際に最大値を求め，W の形状を決定することは困難であるが，極値函数の性質，唯一性が Ω が有限個の解析曲線に囲まれた平面領域の場合 Garabedian によって調べられている．なお，W が円板にならない例は最近 Heins [7] によって得られている．

一般の Pick-Nevanlinna 問題は Hejhal [8, 9] Gamelin [4, 5] によりつぎのように与えられている：μ_ν を Ω 上の support compact なボレル測度とし，汎函数 $L_\nu(f)=\int f\,d\mu_\nu$，$\nu=1,2,\cdots N$ に対し，データ $\{A_\nu\}$，$\nu=1,\cdots N$ を与える．$\mathcal{B}=\{f \mid \|f\|\leqq 1,\ L_\nu(f)=A_\nu,\ \nu=1,\cdots N\}$ とし，$\{d\mu_\nu\}_{\nu=1}^{N}$ とは独立な support compact なボレル測度 μ_0 について $\max(\mathrm{Re}\, L_0(f))$，$f\in\mathcal{B}$ を決定せよ．最大値および極値函数の存在は，正規族の議論で容易に示されるので，極値函数の唯一性およびその性質が問題となる．なお f のノルム $\|f\|$ については上限ノルム以外のノルムも採

用できる．

条件 $\|f\| \leqq 1$ によりデータに制限が付くが，本講演ではそのような制限のつかない Carathéodory − Fejér [2] の定式化によって問題を扱おう．すなわち，函数族 $\mathcal{F} = \{f \mid L_\nu(f) = A_\nu, \nu = 1, \cdots N\}$ とし，

$$m(A_1, \cdots, A_N) = \min_{f\in\mathcal{F}} \|f\|$$

を求める問題を考える．実際，Pick−Nevanlinna問題との関係は，まず函数の存在については，$m(A_1, \cdots A_N) \leqq 1$ であればよい．また，汎函数 L_0 に関する極値問題については，新しいデータ $L_0(f) = A_0$ を加え，集合 $V=\{A_0 \mid m(A_0, A_1, \cdots A_N) = 1\}$ 上で $\mathrm{Re}\, A_0$ の最大値を求めればよい．

2．基本補題．上の定式化によって極値問題を考える場合，つぎの補題が有用である．証明は Duren [3] 参照．

補題1．X は $\| \ \|$ をノルムとするバナッハ空間とし，S を X の閉部分空間，$S^\perp = \{T \mid T(x) = 0, x \in S\}$ とするとき，固定された x_0 に対し，

$$\max_{\psi\in S^\perp, \|\psi\|=1} |\psi(x_0)| = \inf_{y\in S} \|x_0 + y\|.$$

この補題の応用として，複数の汎函数に関する極値問題を

それ等の適当な一次結合から成る一つの汎函数に関する極値問題に帰着させることができる（Jenkins - Suita [10]）.

定理1．正則函数のつくるバナッハ空間 X に有限個の汎函数 $\{L_\nu\}_{\nu=1}^N$ とデータ $\{A_\nu\}_{\nu=1}^N$ が与えられているとする．f_0 がこれ等のデータに関する Pick - Nevanlinna 問題の極値函数ならば，f_0 は適当な一次結合 $\varphi_0 = \sum_{\nu=1}^N c_\nu L_\nu$ とデータ $\sum_{\nu=1}^N c_\nu A_\nu$ に関する同じ問題の極値函数となる．

証明．補題1の x_0 として f_0 をとる．$S = \{f \mid L_\nu(f) = 0,\ \nu = 1, \cdots N\}$ にとり，補題1の左辺で最大値を与える汎函数を φ_0，$\|\varphi_0\| = 1$ とすれば，$\varphi_0(f_0) = \|f_0\|$ をうる．$\varphi_0 \in S^\perp$ だから，$L_\nu(f) = 0, \nu = 1, \cdots N$ のとき $\varphi_0(f) = 0$．このことは $\varphi_0 = \sum_{\nu=1}^N c_\nu L_\nu$ と表わされることを示す．すなわち，$f \in \mathcal{F}$ に対して $\|f\| \geq |\varphi_0(f)| = \sum_{\nu=1}^N c_\nu A_\nu$．これは f_0 の極値性を示す．

3．唯一性．Ω が平面領域で O_{AB} に属さないとする．X として Ω 上の有界函数のつくるバナッハ空間 $H^\infty(\Omega)$ をとる．このとき．

定理2．$\{L_\nu\}_{\nu=1}^N$ は，Ω 上のコンパクト集合 K 上での上限ノルム $\|f\|_K$ に関して連続な線形汎函数の集合とし，対応するデータを $\{A_\nu\}_{\nu=1}^N$ とする．$M_0 = m(A_1, \cdots A_N) > 0$ ならば，極値函数は唯一つである．

証明．極値函数 f_0，f_0^* が存在したとする．このとき，$g=(f_0+f_0^*)/2$ も極値函数である．$h=(f_0-f_0^*)/2$ とおけば，$|h|^2+|g|^2=\frac{1}{2}(|f_0|^2+|f_0^*|^2)\leqq M_0^2$. したがって $|g|\leqq M_0-|h|^2/2M_0$. $\{\zeta_\nu\}_{\nu=1}^{l}$ をK上にある h^2 の零点全体とする．このとき，

$$H(z)=\frac{\eta}{2}\frac{h^2}{M_0}\prod_{\nu=1}^{l}\frac{1}{z-\zeta_\nu}, \quad \left|\eta\prod_{\nu=1}^{l}\frac{1}{\zeta-\zeta_\nu}\right|\leqq 1, \ \zeta\in\partial\Omega$$

とおけば $|g(z)|+|H(z)|\leqq M_0$, $z\in\Omega$. 定理1により，g は $\psi_0=\sum_{\nu=1}^{N}c_\nu L_\nu$ とデータ $\sum_{\nu=1}^{N}c_\nu A_\nu$ に関する Pick–Nevanlinna 問題の極値函数となっている．変分 $g_\varepsilon(z)=g(z)+\varepsilon H(z)$, $|\varepsilon|=1$ を用いることにより $\psi_0(H)=0$. H の代りに $Hf/\|f\|$ を用いて，$\psi_0(Hf)=0$, $f\in H^\infty(\Omega)$. Bishop の近似定理[1]を用いることにより，K上で正則な函数は，K上で $H^\infty(\Omega)$ の函数により一様に近似される．すなわち，任意な $f\in H^\infty(\Omega)$ に対し，f/H はK上正則だから，$\varepsilon>0$ に対し，$\|f/H-f_\varepsilon\|<\varepsilon$ となる $f_\varepsilon\in H^\infty(\Omega)$ が存在する．$\psi_0(Hf_\varepsilon)=0$ だから，$\psi_0(f)=0$ となり矛盾を生ずる．

4．極値函数の境界挙動．この節では Ω を有限なリーマン面（$\notin O_{AB}$）とし，Ω 上で調和，$\bar{\Omega}$ で連続な実数値調和函数 $\chi(z)$ に対し，ノルムを $\chi\text{-}\|f\|=\sup|f(z)e^{-\chi(z)}|$, $z\in\Omega$

と定義する．$L_\nu, \nu=1,\cdots N$ は Ω 上のコンパクト集合 K 上でのノルム $\|f\|_K$ に関して連続な線形汎関数とする．f の K 上への制限は K 上の連続関数 $C(K)$ の部分空間だから，ハーン・バナッハの定理とリースの表現定理より，$L_\nu(f) = \int f\,d\mu_\nu$，$f\in C(K)$ と表わされる．Ω のグリーン関数を $g(z,\zeta)$ とすれば，$d\mu_\nu$ の変換

$$l_\nu(z)\,dz = \frac{i}{\pi}\left(\frac{\partial}{\partial z}\int g(z,\zeta)\,d\mu_\nu(\zeta)\right)dz,$$

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\,l_\nu(z)\,dz = L_\nu(f), \quad f\in H^\infty(\Omega)$$

をうる．ノルム χ-$\|f\|$ が有限な f のつくるバナッハ空間を X とかけば，これは $H^\infty(\Omega)$ と集合としては同じである．

定理3　K は $\partial\Omega$ を分離しないとする．$\{L_\nu\}_{\nu=1}^N$ とデータ $\{A_\nu\}_{\nu=1}^N$ に対し，$M_0 = \inf \chi$-$\|f\|$, $f\in\mathfrak{F} > 0$ ならば，唯一つの極値関数 f_0 が存在する．χ-$\|f_0\| = M_0$ であり，$\partial\Omega$ 上の点 ζ の単連結な近傍 U 上で $f_0(z)e^{-(\chi(z)+i\chi^*(z))}$ は境界を越えて解析接続される．ここで χ^* は χ の共役調和関数である．

証明．正規族の議論から，f_0 の存在および χ-$\|f_0\|=M_0$ は容易に分る．$S=\{f \mid L_\nu(f)=0,\ \nu=1,\cdots N,\ f\in X\}$ とおく．補題1より $\psi_0(f_0) = \max_{f\in S^\perp, \|\psi\|=1}\psi(f_0) = \chi$-$\|f_0\|$．$\bar{A}(\Omega)$ を Ω で正則，$\bar\Omega$ で連続な関数全体とすれば，ψ_0 の $\bar{A}(\Omega)$ へ

の制限について $\|\psi_0\|_{\overline{A}(\Omega)} \leqq 1$. f に $\psi_0(f)$, $f \in \overline{A}(\Omega)$ を対応させる汎函数を，ハーン・バナッハの定理により，$C(\partial\Omega)$ 上の汎函数に拡張し，再びリースの表現定理によって $\partial\Omega$ 上の測度 $d\mu$ で表現すれば，

$$\psi_0(f) = \int_{\partial\Omega} f\, d\mu \quad , \qquad f \in C(\partial\Omega).$$

$$\|e^x d\mu\| = \|\psi_0\|_{\overline{A}(\Omega)}.$$

さらに　定理1から，

$$\int_{\partial\Omega} f\left(d\mu - \sum_{\nu=1}^{N} c_\nu \ell_\nu(z)\, dz\right) = 0 \quad , \qquad f \in \overline{A}(\Omega)$$

したがって，Royden [12] によるリース兄弟の定理の拡張をつかって

$$d\mu = \left(\sum_{\nu=1}^{N} c_\nu \ell_\nu(z) + \varphi_0(z)\right) dz \quad , \qquad \varphi_0\, dz \in H^1(\Omega)$$

をうる. $\|e^x d\mu\| = \int_{\partial\Omega} e^x \left|\sum_{\nu=1}^{N} c_\nu \ell_\nu(z) + \varphi_0(z)\right| |dz| \leqq 1$

極値函数 f_0 について，

$$M_0 \leqq \int_{\partial\Omega} |f_0 e^{-x}|\, e^x \left|\sum_{\nu=1}^{N} c_\nu \ell_\nu + \varphi_0\right| |dz|$$

$|f_0 e^{-x}|$ の境界値は a. e. に M_0 をこえないから，

$$\int_{\partial\Omega} e^x \left|\sum_{\nu=1}^{N} c_\nu \ell_\nu(z) + \varphi_0(z)\right| \geqq 1.$$

すなわち $\|e^{\chi}\phi\| = 1$. $\Omega - K$ は領域だから，$(\sum_{\nu=1}^{N} c_\nu l_\nu + \varphi_0)dz \neq 0$, a.e. これから $|e^{-\chi}f_0| = M_0$ a.e. on $\partial\Omega$ をうる．

$$M_0 = \int_{\partial\Omega} e^{-\chi} f_0 \, e^{\chi} \left(\sum_{\nu=1}^{N} c_\nu l_\nu + \varphi_0 \right) dz$$

より，$f_0(\sum_{\nu=1}^{N} c_\nu l_\nu + \varphi_0)\,dz \geq 0$ a.e. along $\partial\Omega$. 境界点 ζ の近傍 U で $E(z) = e^{-\chi(z) - \chi^*(z)}$ とおけば，$|f_0 E| = M_0$ a.e. on $\partial\Omega$, $f E E^{-1}(\sum_{\nu=1}^{N} c_\nu l_\nu + \varphi_0)\,dz \geq 0$ a.e. along $\partial\Omega$. Rudin の結果 [13] より，fE, $E^{-1}(\sum_{\nu=1}^{N} c_\nu l_\nu + \varphi_0)dz$ は同時に $\partial\Omega$ 上へ解析接続される．最後に，極値函数の唯一性については，他の極値函数 f_0^* についても，$\partial\Omega \cap U$ 上で $|f_0^* E| = M_0$, $f_0^* E E^{-1}(\sum_{\nu=1}^{N} c_\nu l_\nu + \varphi_0)\,dz \geq 0$ が成立するから，$f_0^* = f_0$.

5．古典的な Pick－Nevanlinna 問題．Ω を有限なリーマン面に取ったとき，この問題を考えよう．interpolation points $\{p_\nu\}_{\nu=1}^{N}$ に対し，p_ν を原点に対応させる局所助変数をとり，各 parameter disc Δ_ν（互いに素としてよい）上にデータ

$$D_\nu(z) = \sum_{j=0}^{n_\nu} a_j^{(\nu)} z^j, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, N$$

を与える．$\mathcal{F}$ を Ω 上の有界正則函数 f で，$f - D_\nu$ が p_ν 上に少くとも $n_\nu + 1$ 位の零点をもつもの全体とする．

定理4．$M_0 = \inf_{\mathcal{F}} \|f\| > 0$，（$\|f\|$ は上限ノルム）ならば

，唯一つの極値函数f_0が存在して，$\partial\Omega$上$|f_0|=M_0$となる．Ωが種数g，k個の境界をもてば，f_0はΩを高々$\sum_{\nu=1}^{N}(n_\nu+1)+2g+k-2$枚の円板$|w|<M_0$の上へ写像する．

証明．函数fがP_1で$D_1(z)$で与えられる展開をもつということは，そこでn_1位までの導函数の値を汎函数の値として指定することになる．すなわち$L_1(f)=f(P_1)$，$L_2(f)=f'(P_1)$，…$L_{n_1+1}(f)=f^{(n_1)}(P_1)$，…　にデータ，$a_0^{(1)}$，$a_1^{(1)}$，…$n_1!\,a_{n_1}^{(1)}$，…　を与える．このことは，各 parameter discs Δ_ν，$\nu=1,\dots N$の境界上に$d\mu_1=(2\pi i z)^{-1}dz$，$d\mu_2=(2\pi i z^2)^{-1}$，…　$d\mu_{n_1+1}=(2\pi i z^{n_1+1})^{-1}n_1!\,(\text{on }\partial\Delta_1)$，…　$d\mu_\nu$，$\nu=1,2,\dots N$は$H^\infty(\Omega)$に対し，与えられた汎函数を表現しているから，前定理から，極値函数f_0と，$\partial\Omega$の近傍で正則な微分$d\Phi_0$に対し，$\partial\Omega$に沿って

$$f_0\,d\Phi_0\geq 0\quad,\quad\int|d\Phi_0|=1$$

をうる．各P_ν上に$n_\nu+1$位の零点をもつ$\bar{\Omega}$上で正則な函数$F(z)$をとれば，$f\in\bar{A}(\Omega)$に対し，

$$\int_{\partial\Omega}fF\,d\bar{\Phi}_0=0$$

このことは，$F\,d\Phi_0$がΩ上の正則微分であることを示す．したがって，$f_0\,d\Phi_0$はΩ上の有理形微分であり，Ωの

double $\hat{\Omega}$上へ有理形接続される．$\hat{\Omega}$ 上での $\deg(f_0 d\Phi_0)$ $= 2(2g+h-2)$．また $f_0 d\Phi_0$ の極の位数の総和は $2\sum_{\nu=1}^{N}(n_\nu+1)$．これから $f_0 d\Phi_0$ の零点の位数の総和は Ω上で高々 $2g+h-2+\sum_{\nu=1}^{N}(n_\nu+1)$．これが f_0 の零点となり得るので，f_0 の分像の最大枚数を表わす．

6．一般化　問題の一般化については二つの方向が考えられる．一つは，リーマン面Ωに関する一般化．ノルムとして上限ノルムを取るときは，定理2より，平面領域$\Omega \in O_{AB}$についての極値函数の一意性は保証される．Xノルムについては，Hejhal の方法で種数有限の$\Omega \in O_{AB}$について極値函数の一意性が示される．この問題には，函数としてのコーシー核の構成が基本的である（Jenkins–Suita [10]）．境界挙動については，測度論的な情報は得られるが，分像も無限枚となり，分らない点も多い．例えば Bl 型分像との関係も不明である．

今一つは，有限なリーマン面の場合にデータを無限個にする問題がある．この場合は，面Ωの近似列$\{\Omega_\nu\}$をつくり，Ω_νにデータを制限することにより，Ω_νでの極値函数f_νの極限として極値函数f_0をとらえることはできる．しかし，各々のΩ_ν上で得られる関係 $f_\nu d\Phi_\nu \geq 0$ における $d\Phi_\nu$ は必ずしも non trivial な微分へ収束しない．このためf_0

の境界挙動は不明である．$d\Phi_\nu \longrightarrow 0$ となる例を示そう
Ω として単位円 $|z|<1$ をとり，interpolation points
として $0<t_1<t_2<\cdots t_n<\cdots\to 1$ をとる．各 t_ν 上にデー
タ t_ν を与えれば，明らかに $f_0=z$ は極値函数である．
$\Omega_n=\{|z|<1-\frac{1}{n}\}$，$1-\frac{1}{n}=r_n$ とおけば，Ω_n に含
まれる t_j の個数を m_n として．$\partial\Omega_n$ に沿って

$$z\, r_n\Big(\frac{1}{z}\ \frac{1}{i}\sum_{k=2}^{m_n} d\log\frac{r_n^2 - t_k z}{r_n(z-t_k)}\Big)\Big/(m_n-1) \geqq 0,$$

$$d\Phi_n = \frac{r_n}{z}\frac{1}{i}\sum_{k=2}^{m_n} d\log\frac{r_n^2-t_k z}{r_n(z-t_k)}\Big/(m_n-1)$$

ととれば，$\int_{\partial\Omega_n}|d\Phi_n|=1$．容易に確かめられるように，$\Omega$
の広義一様に $d\Phi_n \longrightarrow 0$。

文献

[1] Bishop, E., Subalgebra of functions on a Riemann surface. Pacific J. Math. 8(1958), 29-50.

[2] Carathéodory, C., and L. Fejér, Über den Zusammenhang der Extremen von harmonischen Funktionen mit ihren Koeffizienten und über den Picard-Landauschen Satz. Rend. Circolo Math. Palermo 32(1911), 218-239.

[3] Duren, P., Theory of H^p spaces. Academic Press (1970).

[4] Gamelin, T. W., Extremal problems in arbitrary domains. Michigan Math. J. 20(1972), 3-11.

[5] ______, Extremal problems in arbitrary domains II. Ibid. 21(1974), 297-307.

[6] Garabedian P. R., Schwarz's lemma and the Szegö kernel function. Trans. Amer. Math. Soc. 67(1949), 1-35.

[7] Heins, M., Nonpersistence of the Grenzkreis phenominon for Pick-Nevanlinna interpolation on annuli. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. 596(1975), 1-21.

[8] Hejhal, D. A., Linear extremal problem for analytic functions. Acta Math. 128(1972), 91-122.

[9] _____, Linear extremal problem for analytic functions with interior side conditions. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A 586(1974), 1-36.

[10] Jenkins, J. A., and N. Suita, On the Pick-Nevanlinna Problem. Kodai Math. J. 2(1979), 82-102.

[11] Nevanlinna, R., Ueber beschränkte analytische Funktionen . Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A 32(1929), 1-75.

[12] Royden, H. L., The boundary values of analytic and harmonic functions. Math. Z. 78(1962), 1-24.

[13] Rudin, W., Analytic functions of class H_p. Tras. Amer. Math. Soc.78(1955), 46-66.